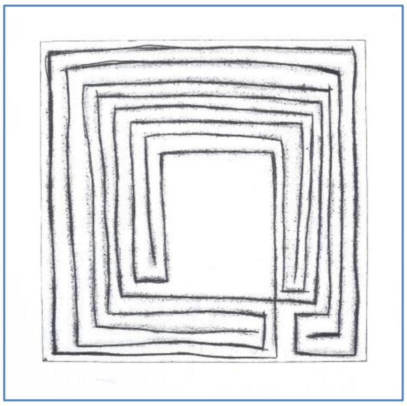

L.Mengoni 1997. Labirinto quadrato

1996. ALTRE APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI TRASFORMAZIONE. FUNZIONI SIMMETRICHE.

1 - Funzioni simmetriche di più variabili.

Il concetto di simmetria rispetto ad un gruppo di trasformazioni è stato finora preso in considerazione in relazione alle figure geometriche ed alle loro trasformazioni. Tuttavia abbiamo avvertito che la costruzione di classi di equivalenza in un insieme è possibile in ambiti molto più estesi e generali. Tratteremo qui un esempio classico che ci è fornito dall'algebra tradizionale.

Si prendano in considerazione *n* variabili (con *n* > 1) complesse, tutte distinte tra loro, variabili che chiameremo qui provvisoriamente:

(1) $$x_1,\ x_2, \dots, x_n;$$

è noto che esiste un gruppo di *n!* permutazioni, che portano tutte l'insieme (1) su se stesso. Si consideri poi una funzione razionale *F* delle variabili (1); può avvenire che, in corrispondenza ad ogni permutazione, la funzione *F* assuma valori diversi; ma esistono anche delle funzioni che assumono un solo valore, quale che sia l'operazione di permutazione che si esegue sulle (1). In questo caso la funzione *F* delle variabili (1) viene abitualmente chiamata "simmetrica"; e questo nome è facilmente comprensibile, quando si tengano presenti le considerazioni svolte finora.

È pure noto dall'algebra elementare che è possibile costruire una equazione algebrica di ordine *n* che ha come radici i numeri dell'insieme (1); scritta l'equazione nella forma classica:

(2) $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

è noto che i coefficienti sono particolari funzioni simmetriche delle radici (1); precisamente sia ha che, per

(3) $$1 \leq k \leq n,$$

il rapporto

(4) $$\frac{(-1)^k a_k}{a_0}$$

vale la somma di tutti i diversi monomi di grado *k* costruiti con i numeri dell'insieme (1) tutti diversi tra loro. Tali funzioni vengono designate spesso come "funzioni simmetriche elementari" dei numeri (1), e si dimostra che: "*Ogni funzione razionale simmetrica dei numeri (1) può essere espressa come funzione razionale delle funzioni simmetriche elementari*".

Questa proposizione viene attribuita a K. F. Gauss e viene chiamata abitualmente "*Teorema fondamentale delle funzioni simmetriche di più variabili*". Essa verrà richiamata tra poco, in relazione al classico problema della risoluzione algebrica dell'equazione di terzo grado. È facile osservare che l'ipotesi che una funzione di più variabili sia simmetrica, nel senso precisato poco sopra, permette di semplificare i calcoli che conducono alla espressione della funzione stessa e di controllare la loro validità, quando ciò sia utile.

Un esempio aiuterà a comprendere il significato di ciò che diciamo. Si consideri la funzione f delle tre variabili x, y, z data da:

(5) $$f = x + y + z.$$

La f è chiaramente una funzione simmetrica secondo la definizione data, e tale è ovviamente anche ogni sua potenza ad esponente intero.

Si voglia per esempio determinare l'espressione della funzione $F = f^3$; appare evidente che questa sarà data da una somma di monomi di terzo grado nelle tre variabili x, y, z; l'ipotesi che la funzione f^3 sia simmetrica permette di assicurare che, qualora nella sua espressione figuri un certo monomio nelle variabili in parola, nella stessa espressione debbono figurare anche tutti i monomi che si ottengono da quello applicandogli tutte le operazioni del gruppo di 6 permutazioni che portano in sé l'insieme finito costituito dai tre simboli x, y, z. Così per esempio è chiaro che se nell'espressione di F esiste il termine x^3, nella stessa espressione dovranno apparire come addendi anche i cubi di y e di z; ed analogamente, se nella espressione di F compare il termine $3x^2y$, nella stessa espressione dovranno apparire tutti i termini che si esprimono mediante il triplo prodotto del quadrato di una variabile per un'altra. Un calcolo che non presenta difficoltà concettuali conferma ciò che abbiamo detto; si ha infatti:

(6) $$F = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y+z) + 3y^2(z+x) + 3z^2(x+y) + 6xyz.$$

2 - L'equazione algebrica di terzo grado.

È noto che la risoluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado costituisce una gloria della scuola matematica italiana del secolo XVI; le formule risolutive furono infatti date da Niccolò Tartaglia, Ludovico Ferrari, Gerolamo Cardano e Scipione del Ferro, e vengono anche oggi riportate spesso nei trattati di matematica superiore. Tuttavia l'idea di collegare col problema della soluzione delle equazioni algebriche i concetti relativi alle funzioni simmetriche fu sfruttata da G. Lagrange quasi due secoli dopo i pionieri citati; essa costituisce un'istruttiva applicazione dei concetti stessi.

Sia data un'equazione algebrica di terzo grado; è noto che, con calcoli elementari che già Tartaglia aveva sviluppato, essa può essere scritta nella forma:

(1) $$x^3 + px + q = 0,$$

dove p e q sono coefficienti complessi qualunque. Indichiamo con a, b, c le radici della (1); a seguito dei noti legami (di cui abbiamo detto) tra i coefficienti e le radici di una equazione algebrica avremo:

(2) $$a + b + c = 0,$$
$$ab + bc + ca = p,$$
$$abc = -q.$$

Indichiamo poi con α una radice cubica dell'unità diversa da 1; α sarà quindi radice dell'equazione:

(3) $$x^2 + x + 1 = 0;$$

si ha infatti:

(4) $$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1,$$

e pertanto α può essere espressa algebricamente nella forma:

(5) $$\alpha = \frac{i\sqrt{3}-1}{2},$$

dove abbiamo indicato con il simbolo i l'unità immaginaria, soddisfacente alla relazione $i^2 + 1 = 0$; (si verifica che si ha:

(6) $$\alpha^2 = \frac{-i\sqrt{3}-1}{2},$$

ed anche:

(7) $$\alpha^3 = 1.)$$

Si consideri ora il sistema lineare seguente:

(8) $$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + \alpha b + \alpha^2 c = P \\ a + \alpha^2 b + \alpha c = Q \end{cases} .$$

OSSERVAZIONE - Se i numeri P e Q fossero noti, le radici dell'equazione (1) si potrebbero calcolare con operazioni razionali: si ha infatti, dalle (8) e (3):

(9) $$a = \frac{P+Q}{3},\ b = \frac{\alpha^2 P + \alpha Q}{3},\ c = \frac{\alpha P + \alpha^2 Q}{3}.$$

Pertanto il problema della risoluzione della (1) è ricondotto alla determinazione dei due numeri P e Q che compaiono nelle (8); queste formule esibiscono P e Q come funzioni non simmetriche di *a, b, c*. Si osserva tuttavia che le permutazioni eseguite sulla terna delle radici *a, b, c* hanno i seguenti effetti:

I) Lo scambio di a con b porta P in αQ e Q in $\alpha^2 P$;

II) Lo scambio di a con c porta P in $\alpha^2 Q$ e Q in αP.

Ora è noto che ogni permutazione sulla terna *a, b, c* si può ottenere operando successivamente in modo opportuno con i due scambi (*ab*) ed (*ac*) sopra nominati; pertanto ogni permutazione sulla terna *a, b, c* lascia invariate le funzioni simmetriche elementari della coppia P^3, Q^3. Poniamo:

(10) $$U = P^3 + Q^3,\ V = (PQ)^3.$$

In forza dell'osservazione ora fatta, le funzioni U e V restano invariate per ogni permutazione delle terna *a, b, c*; esse quindi sono funzioni simmetriche di questi numeri, e di conseguenza funzioni razionali dei coefficienti p e q della (1). La determinazione di U e V in funzione di p e q si ottiene con calcoli del tutto semplici ed elementari, che tuttavia possono essere giudicati laboriosi; essi possono essere semplificati tenendo presenti le osservazioni svolte nel paragrafo precedente, oppure eseguendoli con un software di calcolo algebrico. Ci limitiamo a riportare i risultati che sono i seguenti:

(11) $$U = -27\,q,\ V = -27\,p^3.$$

Queste formule confermano l'affermazione fatta poco sopra, secondo la quale le funzioni simmetriche della coppia di numeri P^3 e Q^3 sono funzioni razionali dei coefficienti p e q della (1). Pertanto P^3 e Q^3 sono radici dell'equazione di secondo grado nell'incognita z:

(12) $$z^2 + 27\,qz - 27\,p^3 = 0;$$

questa equazione viene chiamata talvolta la "*Risolvente di Lagrange*" della (1); le sue radici si ottengono con procedure elementari, e forniscono i cubi di P e Q; questi si ottengono pertanto con estrazione di radici cubiche, e le radici *a, b, c* della (1) si hanno poi dalle (9).

I calcoli conducono ad espressioni che coincidono con le formule risolutive dell'equazione (1) ottenute con procedure diverse da quella qui seguita; essa è stata presentata principalmente per dare esempi di applicazione del concetto di simmetria in campi diversi dalla geometria.

NdR. File reimpaginato aprile 2014.